31.4. Двойственный симплексный метод (метод последовательного уточнения оценок)

Двойственный симплексный метод, как и обычный симплексный метод, позволяет в результате последовательного улучшения так называемых почти допустимых опорных решений либо найти оптимальное решение, либо установить его отсутствие.

Пусть имеется задача линейного программирования в канонической форме

$$Z(X) = CX \to \max,$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0,$$

$$X \geqslant \theta.$$

Почти допустимым опорным решением (ПДОР) задачи линейного программирования называется такой n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, который удовлетворяет системе ограничений задачи, не удовлетворяет условиям неотрицательности переменных и для которого векторы условий $A_1, A_2, \dots, A_m$, соответствующие отличным от нуля координатам, линейно независимы.

В двойственном симплексном методе рассматриваются ПДОР, при которых оценки Δ_k разложений векторов условий A_k по базису ПДОР соответствуют признаку оптимальности, т.е.:

- в задаче на максимум $\Delta_k \geqslant 0 \quad \forall k$;
- в задаче на минимум $\Delta_k \leqslant 0 \quad \forall k$.

Почти допустимое опорное решение является оптимальным, если оно является допустимым (признак оптимальности ПДОР).

Если в задаче линейного программирования на максимум (минимум) для заданного ПДОР с неотрицательными (неположительными) оценками хотя бы одна координата отрицательная $x_{l0} < 0$ и при этом среди коэффициентов x_{lj} ($j = 1, 2, ..., n$) разложений векторов условий по базису данного решения существует хотя бы один отрицательный $x_{lk} < 0$, то решение может быть улучшено (приближено к оптимальному), т.е. можно построить новое ПДОР, для которого значение целевой функции будет меньше (больше), если из его базиса вывести вектор A_l и ввести вектор A_k, номер которого находится из условия

$$\theta_{0l} = \min_j \left\{ \left| \frac{\Delta_j}{x_{lj}} \right| \right\} = \left| \frac{\Delta_k}{x_{lk}} \right|, \quad x_{lj} < 0. \tag{31.10}$$

Если для ПДОР существует хотя бы одна отрицательная координата x_{l0} и при этом не существует отрицательного коэффициента x_{lj} разложений векторов условий A_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений (признак отсутствия решения задачи ввиду несовместности системы ограничений).

Алгоритм двойственного симплексного метода:

1. Привести задачу к каноническому виду.

2. Найти ПДОР с базисом из единичных векторов, вычислить оценки векторов условий по базису этого решения и, если они согласуются с признаком оптимальности, решить задачу двойственным симплексным методом.

3. Если ПДОР не имеет отрицательных координат, то оно является допустимым и оптимальным. Решение задачи заканчивается.

4. Если ПДОР имеет отрицательную координату $x_{l0} < 0$, для которой соответствующие коэффициенты разложений всех векторов условий неотрицательные ($x_{lj} \geqslant 0 \quad \forall j$), то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений. Решение задачи прекращается.

5. Если имеется хотя бы одна отрицательная координата ПДОР $x_{l0} < 0$ и при этом найдется хотя бы один отрицательный коэффициент x_{lj} разложений векторов условий A_j по базису решения, перейти к новому решению, на котором значение целевой функции будет ближе к оптимальному. Номер вектора A_k, вводимого в базис, находится с использованием параметра θ_{0l} (31.10). Номер вектора A_l, выводимого из базиса, находится из условия $\min\limits_l \{x_{l0}\theta_{0l}\}$ в задаче на максимум или $\max\limits_l \{-x_{l0}\theta_{0l}\}$ в задаче на минимум.

Далее перейти к пункту 3 данного алгоритма.

31.32. Решить двойственным симплексным методом

$$Z(X) = 2x_1 + 15x_2 + 6x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 \geqslant 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 15, \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{Д} \\ -x_4 \\ -x_5 \\ -x_6 \end{array} \right.$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Р е ш е н и е. Приводим задачу к каноническому виду, для чего вводим в левые части ограничений-неравенств неотрицательные дополнительные переменные x_4, x_5, x_6:

$$Z(X) = 2x_1 + 15x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 15, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Для нахождения ПДОР с базисом из единичных векторов умножим каждое из ограничений на -1, получим

$$Z(X) = 2x_1 + 15x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -5, \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = -12, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = -15, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Записываем начальное ПДОР: $X_1 = (0, 0, 0, -5, -12, -15)$ с базисом $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$.

Вычисляем оценки Δ_j разложений векторов условий по базису ПДОР и заполняем первую симплексную таблицу (табл. 31.2). Оценки для векторов условий, не входящих в базис, отрицательные. Следовательно, условия применимости двойственного симплексного метода к задаче на отыскание минимума выполнены. Начальное ПДОР $X_1 = (0, 0, 0, -5, -12, -15)$ не является оптимальным, так как не удовлетворяет условиям неотрицательности переменных задачи. Переходим к новому ПДОР с неположительными оценками для векторов условий. Для того чтобы оценки остались неположительными, необходимо номер k вектора A_k, вводимого в базис, выбрать из условия (31.10). (В таблицах отношения $|\Delta_j/x_{lj}|$, соответствующие минимуму параметра θ_{0l}, выделены жирным шрифтом.) При этом номер l вектора A_l, выводимого из базиса, должен соответствовать отрицательной координате x_l ПДОР. В данном случае отрицательными являются три координаты: $x_4 = -5$, $x_5 = -12$, $x_6 = -15$. Для соответствующих строк (1, 2 и 3-й) симплексной таблицы находим

$$\theta_{01} = \min_j \left\{ \left| \frac{-15}{-3} \right| \right\} = \min_j \{5\} = 5 \text{ при } j = 2;$$

$$\theta_{02} = \min_j \left\{ \left| \frac{-2}{-3} \right|, \left| \frac{-15}{-1} \right|, \left| \frac{-6}{-2} \right| \right\} = \min_j \left\{ \frac{2}{3}, 15, 3 \right\} = \frac{2}{3} \text{ при } j = 1;$$

$$\theta_{03} = \min_j \left\{ \left| \frac{-2}{-1} \right|, \left| \frac{-15}{-1} \right|, \left| \frac{-6}{-1} \right| \right\} = \min_j \{2, 15, 6\} = 2 \text{ при } j = 1.$$

Отсюда следует, что оценки для векторов, не входящих в базис, останутся отрицательными, если при выведении первого вектора базиса A_4 ввести в базис вектор A_2 или при выведении второго или третьего векторов базиса (A_5 или A_6) ввести вектор A_1.

Таблица 31.2

				2 ↓	15	6	0	0	0
	Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
	A_4	0	−5	1	−3	1	1	0	0
	A_5	0	−12	−3	−1	−2	0	1	0
←	A_6	0	−15	$\boxed{-1}$	−1	−1	0	0	1
	Δ_j		0	−2	−15	−6	0	0	0
	θ_1			—	5	—	—	—	—
	θ_2			$^2/_3$	15	3	—	—	—
	θ_3			2	15	6	—	—	—

Для обеспечения скорейшего достижения экстремума целевой функции задачи на отыскание минимума номер l вектора, выводимого из базиса, определяем из условия

$$\max_l \Delta Z_l = \max_l \{-x_{l0}\theta_{0l}\}, \quad x_l < 0, \tag{31.11}$$

где ΔZ_l есть приращение целевой функции при введении в базис ПДОР вектора A_l. Вычисляем максимум:

$$\max_l \Delta Z_l = \max_l \{-(-5) \cdot 5, -(-12) \cdot \frac{2}{3}, -(-15) \cdot 2\} = \max_l \{25, 8, 30\} = 30 \text{ при } l = 3.$$

Третий ($l = 3$) вектор базиса A_6 заменяем вектором A_1 ($\theta_{03} = 2$ при $j = 1$). Выполняем преобразование Жордана с разрешающим элементом $a_{31} = -1$ (см. табл. 31.2).

Получаем новое ПДОР $X_2 = (15, 0, 0, -20, 33, 0)$ (табл. 31.3). Данное решение X_2 не является оптимальным, так как координата решения, содержащаяся в первой строке симплексной таблицы, отрицательная: $x_4 = -20$. Находим

$$\theta_{01} = \min_j \left\{ \left| \frac{-13}{-4} \right| \right\} = \min_j \left\{ \frac{13}{4} \right\} = \frac{13}{4} \text{ при } j = 2.$$

Таблица 31.3

	$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
				2	15 ↓	6	0	0	0
←	A_4	0	−20	0	$\boxed{-4}$	0	1	0	0
	A_5	0	33	0	2	1	0	1	0
	A_1	2	15	1	1	1	0	0	−1
	Δ_j		30	0	−13	−4	0	0	−2
	θ_2			—	$^1/_4$	—	—	—	—

Выводим из базиса $Б_2 = (A_4, A_5, A_1)$ решения X_2 вектор A_4, вводим вектор A_2, переходим к ПДОР $X_3 = (10, 5, 0, 0, 23, 0)$, которое является оптимальным, так как удовлетворяет условиям неотрицательности (табл. 31.4).

Таблица 31.4

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	15	5	0	1	0	$-^1/_4$	0	$-^1/_4$
A_5	0	23	0	0	1	$^1/_2$	1	$^1/_2$
A_1	2	10	1	0	1	$^1/_4$	0	$^1/_4$
Δ_j		95	0	0	−4	$-^{13}/_4$	0	$-^{21}/_4$

Ответ: $\min Z(X) = 95$ при $X^* = (10, 5, 0, 0, 23, 0)$.

Для следующих задач составить и решить двойственные и, используя их решение, найти решение исходных задач:

31.11. $Z(X) = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \geqslant 1, \\ -2x_1 + 3x_2 \geqslant 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

31.12. $Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + 12x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqslant 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geqslant -2, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Для следующих задач составить двойственные, решить их графическим методом и, используя вторую теорему двойственности, найти решения исходных задач:

31.24. $Z(X) = 5x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

31.25. $Z(X) = -x_1 + 9x_2 + 9x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$

Решить двойственным симплексным методом:

31.33. $Z(X) = 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant 2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 5, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j.$$